Colles de Maths - semaine 19 - MP-MP*
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Exercice 1 Soit $\alpha > 1$. Montrer qu'il existe une constante C et une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{C}{k^\alpha}.$$
En considérant les événements $\{\{p \text{ divise } X\}, p \text{ premier}\}$, montrer que
$$\zeta(\alpha) = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}.$$

Exercice 2 Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice aléatoire dont les coefficients sont donnés par des variables aléatoires i.i.d. admettant une variance σ^2. Déterminer l'espérance de $\det X$ ainsi que sa variance dans le cas où les coefficients sont centrés.

Exercice 3 Soit une famille $(X_{i,j})_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n}$ (avec $X_{i,j} = X_{j,i}$ pour tout i, j) une famille de variables de Bernoulli de paramètre p_n mutuellement indépendantes. On considère le graphe aléatoire de sommets $[\![1, n]\!]$, et d'arêtes $\{\{i,j\}, i < j \text{ et } X_{i,j} = 1\}$. Soit X_n le nombre de points isolés dans le graphe.
Déterminer la limite quand $n \to \infty$ de $\mathbb{P}(X_n \geqslant 1)$ dans les deux cas suivants :

1. $n\,p_n - \ln n \to +\infty$;
2. $n\,p_n \to a > 0$.

Exercice 4 Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$. Montrer que presque sûrement seul un nombre fini de A_n sont réalisés.
2. On suppose que les (A_n) sont indépendants et que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$. Montrer que presque sûrement une infinité de A_n sont réalisés.

Exercice 5 On admet le lemme de Borel-Cantelli. Montrer qu'il n'existe pas de loi de probabilités sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(k\mathbb{N}) = \frac{1}{k}$.

Exercice 6 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $1 \leqslant p < q$. Montrer que *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* $\Rightarrow$ *(iv)* et *(iii)* $\Rightarrow$ *(iv)* $\Rightarrow$ *(v)*, où

(i) Convergence L^q : $\mathbb{E}[|X_n - X_\infty|^q] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

(ii) Convergence L^p : $\mathbb{E}[|X_n - X_\infty|^p] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

(iii) Convergence presque sûre : $\mathbb{P}(X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X_\infty) = 1$;

(iv) Convergence en probabilité : $\forall \delta > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X_\infty| > \delta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

(v) Convergence en loi : $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue bornée, $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[f(X_\infty)]$.

On pourra justifier que dans *(iii)*, l'ensemble en argument est bien mesurable.